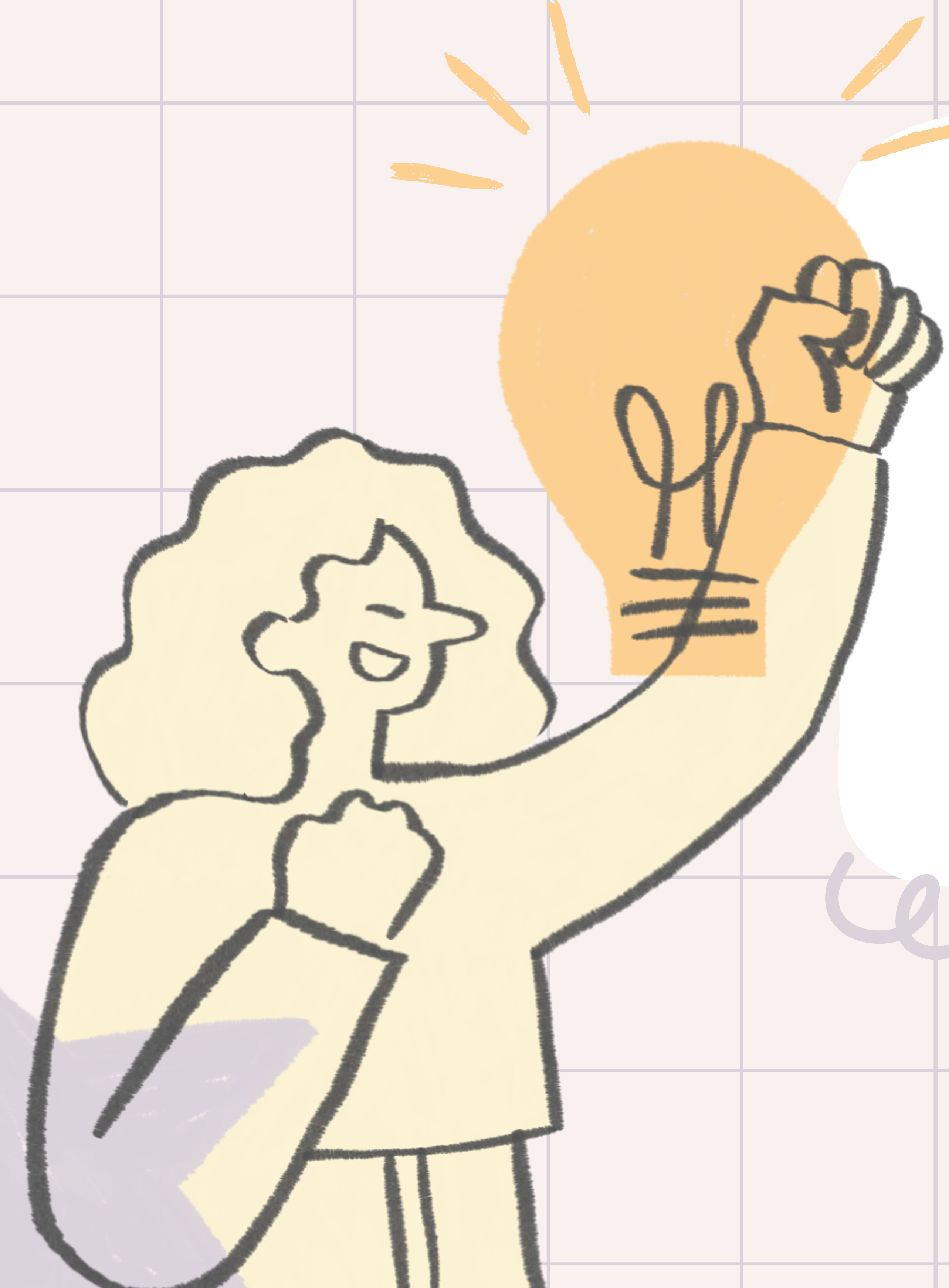


Matriks

Matematika SMA

Materi

1. Pengertian dan Notasi Matriks
2. Ordo Matriks
3. Jenis Matriks
4. Transpos Matriks
5. Kesamaan Matriks
6. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks
7. Perkalian Bilangan Real terhadap Matriks
8. Perkalian Dua Matriks
9. Determinan dan Invers Matriks

Pengertian dan Notasi Matriks

Matriks adalah jajaran bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk baris dan kolom serta dibatasi oleh tanda kurung biasa () atau tanda kurung siku []. Matriks umumnya dilambangkan oleh huruf kapital.

Contoh

Perhatikan tabel kandungan nutrisi daging berikut!

(Per 100 g)	**Kalori (kcal)**	**Protein (g)**	**Lemak (g)**
Daging Sapi	250	20	20
Daging Ayam	120	25	3

Bentuk Matriks:

$$M = \begin{bmatrix} 250 & 20 & 20 \\ 120 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

Ordo Matriks

Ordo merupakan ukuran atau dimensi, yaitu bilangan asli yang menyatakan banyaknya baris dan kolom pada suatu matriks. Ordo dituliskan dalam perkalian baris dengan kolom berturut-turut.

$$M_{a \times b}$$

Ordo matriks M dengan banyak baris a dan banyak kolom b.

Contoh

Matriks M di bawah ini memiliki ordo 2x3, yaitu 2 baris dan 3 kolom.

$$M_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 250 & 20 & 20 \\ 120 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

Baris

$$M_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 250 & 20 & 20 \\ 120 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

Kolom

$$M_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 250 & 20 & 20 \\ 120 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

Jenis Matriks

Matriks Persegi

Matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama. Misal matriks dengan ordo 2 x 2, 3 x 3, dan seterusnya.

Contoh

$$M_{3\times3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix}$$

Matriks Baris

Matriks yang hanya terdiri dari satu baris saja. Ordonya yaitu 1 x n.

Contoh

$$M_{1\times2} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

$$M_{1\times3} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

Matriks Kolom

Matriks yang hanya terdiri dari satu kolom saja. Ordonya yaitu n x 1.

Contoh

$$M_{2\times1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad M_{3\times1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Matriks Nol

Matriks dengan ordo sebarang, namun semua elemennya nol.

Contoh

$$0_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Diagonal

Matriks persegi dengan elemen diagonal utamanya tidak nol, dan elemen lainnya nol.

Contoh

$$M_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

diagonal utama

diagonal samping

Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal utamanya adalah 1.

Contoh

$$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpos Matriks

Transpos dari suatu matriks M dilambangkan oleh M’ atau M^t, yang diperoleh dengan menukar elemen-elemen baris dan kolom matriks tersebut.

Jika matriks M berordo a x b, maka transpos M adalah

$$\boxed{{M^t}_{b\times a}}$$

Contoh

Kita ambil contoh matriks dari tabel kandungan nutrisi daging sapi dan daging ayam, diketahui

$$M = \begin{bmatrix} 250 & 20 & 20 \\ 120 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

transpos matriks M adalah:

$$M^t = \begin{bmatrix} 250 & 120 \\ 20 & 25 \\ 20 & 3 \end{bmatrix}$$

baris pertama

$$M = \begin{bmatrix} 250 & 20 & 20 \\ 120 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

kolom pertama

$$M^t = \begin{bmatrix} 250 & 120 \\ 20 & 25 \\ 20 & 3 \end{bmatrix}$$

Kesamaan Matriks

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama, dituliskan A=B, jika syarat berikut terpenuhi:

#1 Matriks A dan B memiliki ordo sama.

#2 Setiap elemen yang seletak pada matriks A dan B juga bernilai sama.

Penjumlahan & Pengurangan Matriks

Penjumlahan dan pengurangan matriks berlaku untuk matriks-matriks yang memiliki ordo sama. Caranya yaitu dengan mengoperasikan elemen-elemen matriks yang bersesuaian.

Sifat-Sifat

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$A - B = A + (-B)$$

Perkalian Matriks dengan Skalar

Misalnya terdapat matriks $A_{m \times n}$ dan $k \in \mathbb{R}$, maka kA adalah matriks berordo m x n yang unsur-unsurnya diperoleh dengan mengalikan setiap unsur matriks A dengan k. Perkalian seperti ini disebut perkalian skalar

Sifat-Sifat

Untuk matrika A da B yang berordo sama berlaku:

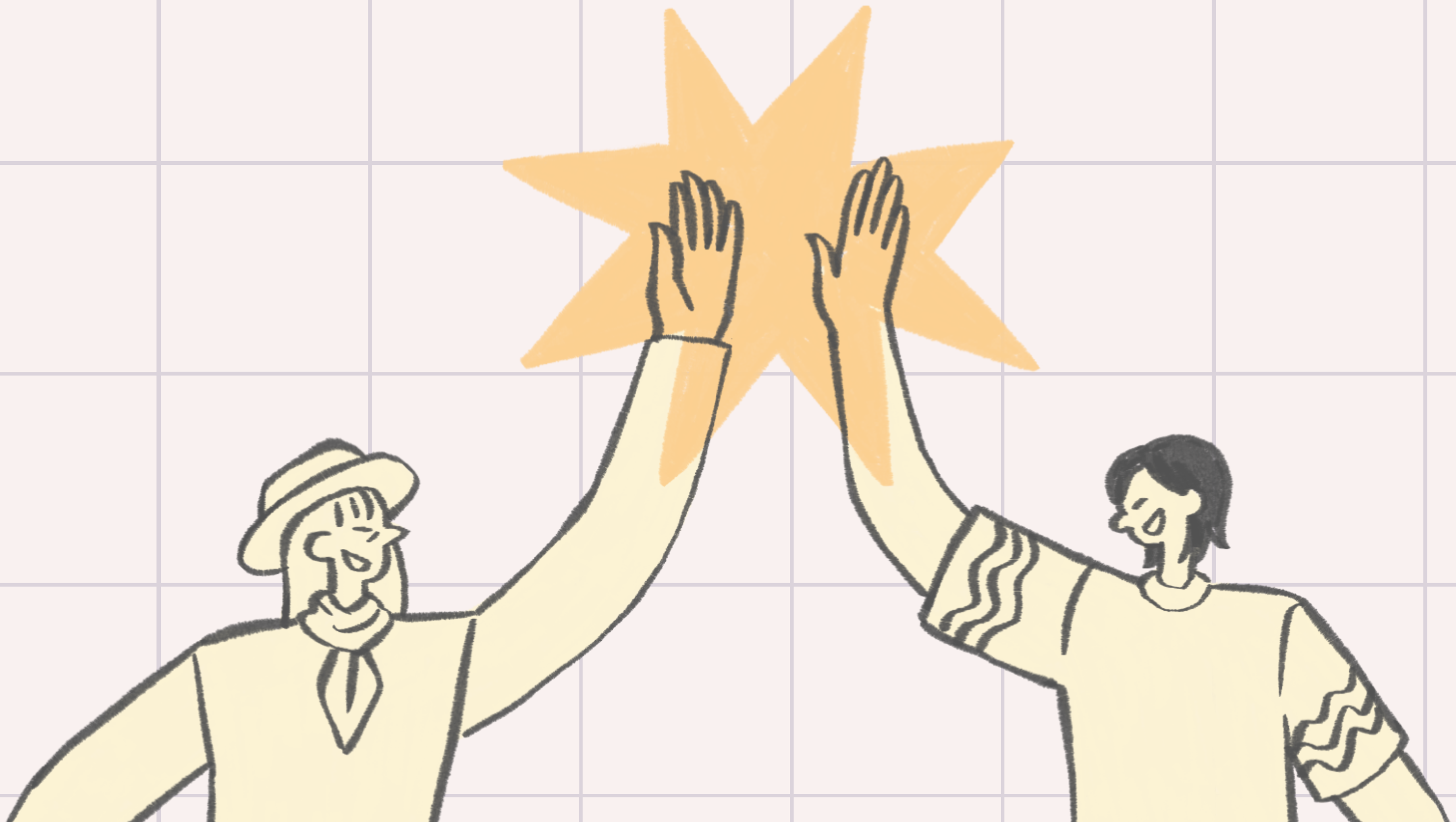
$$k(A + B) = kA + kB$$

$$(k_1k_2)A = k_1(k_2A) = k_2(k_1A)$$

$$(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$$

Perkalian Dua Matriks

Perkalian dua matriks akan terdefinisi dengan syarat banyaknya kolom pada matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua. Misal $A_{m \times n}$ dan $B_{n \times o}$, maka perkalian AB akan menghasilkan matriks berordo m x o.



Contoh

Diketahui dua matriks berikut $A_{2 \times 3}$ dan $B_{3 \times 2}$

$$\underbrace{A_{2\times 3} \quad B_{3\times 1}}_{\text{sama}}$$

$$\underbrace{B_{3\times 1} \quad A_{2\times 3}}_{\text{tidak sama}}$$

Jadi AB akan memiliki ordo:

$$AB_{2\times 1}$$

Sedangkan BA tidak terdefinisi karena tidak memenuhi syarat ordo perkalian matriks.

Elemen-elemen dari perkalian dua matriks dapat dicari dengan menjumlahkan hasil perkalian dari elemen-elemen dengan baris dan kolom yang bersesuaian.

Contoh

Carilah hasil perkalian matriks di bawah ini!

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks pertama 2 x 2 dan matriks kedua 2 x 3. Perkalian matriksnya akan menghasilkan ordo 2 x 3.

Misal kita tulis: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

a adalah elemen baris pertama dan kolom pertama, maka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a = (1 \times 2) + (3 \times 3)$$

b adalah elemen baris pertama dan kolom kedua, maka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = (1 \times 3) + (3 \times 4)$$

c adalah elemen baris pertama dan kolom ketiga, maka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$c = (1 \times (-4)) + (3 \times 5)$$

d adalah elemen baris kedua dan kolom pertama, maka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$d = (-1 \times 2) + (0 \times 3)$$

e adalah elemen baris kedua dan kolom kedua, maka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$e = (-1 \times 3) + (0 \times 4)$$

f adalah elemen baris kedua dan kolom ketiga, maka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$f = (-1 \times (-4)) + (0 \times 5)$$

$$a = 2 + 9 = 11$$

$$b = 3 + 12 = 15$$

$$c = -4 + 15 = 11$$

$$d = -2 + 0 = -2$$

$$e = -3 + 0 = -3$$

$$f = 4 + 0 = 4$$

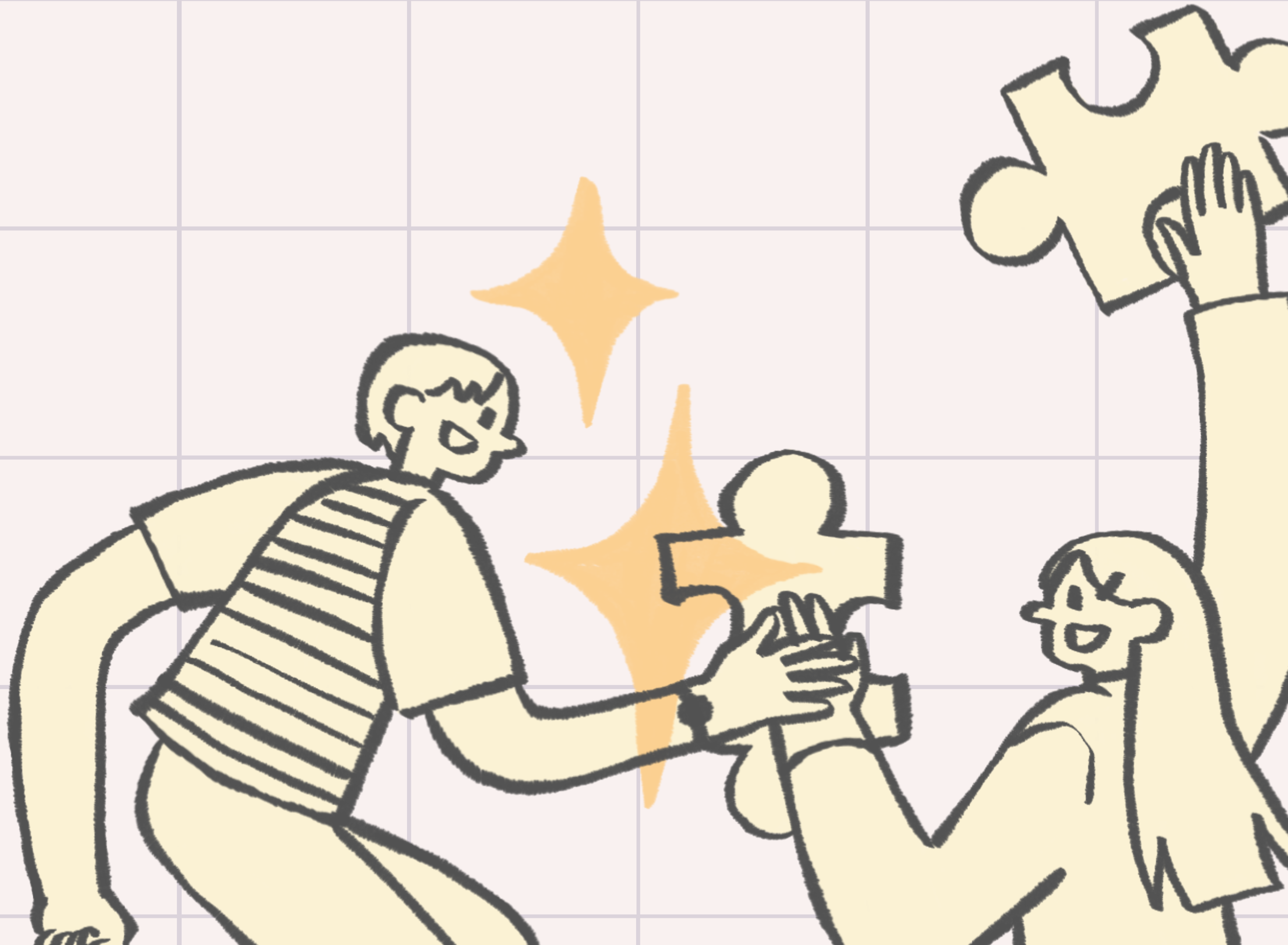
Jadi:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 15 & 11 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat

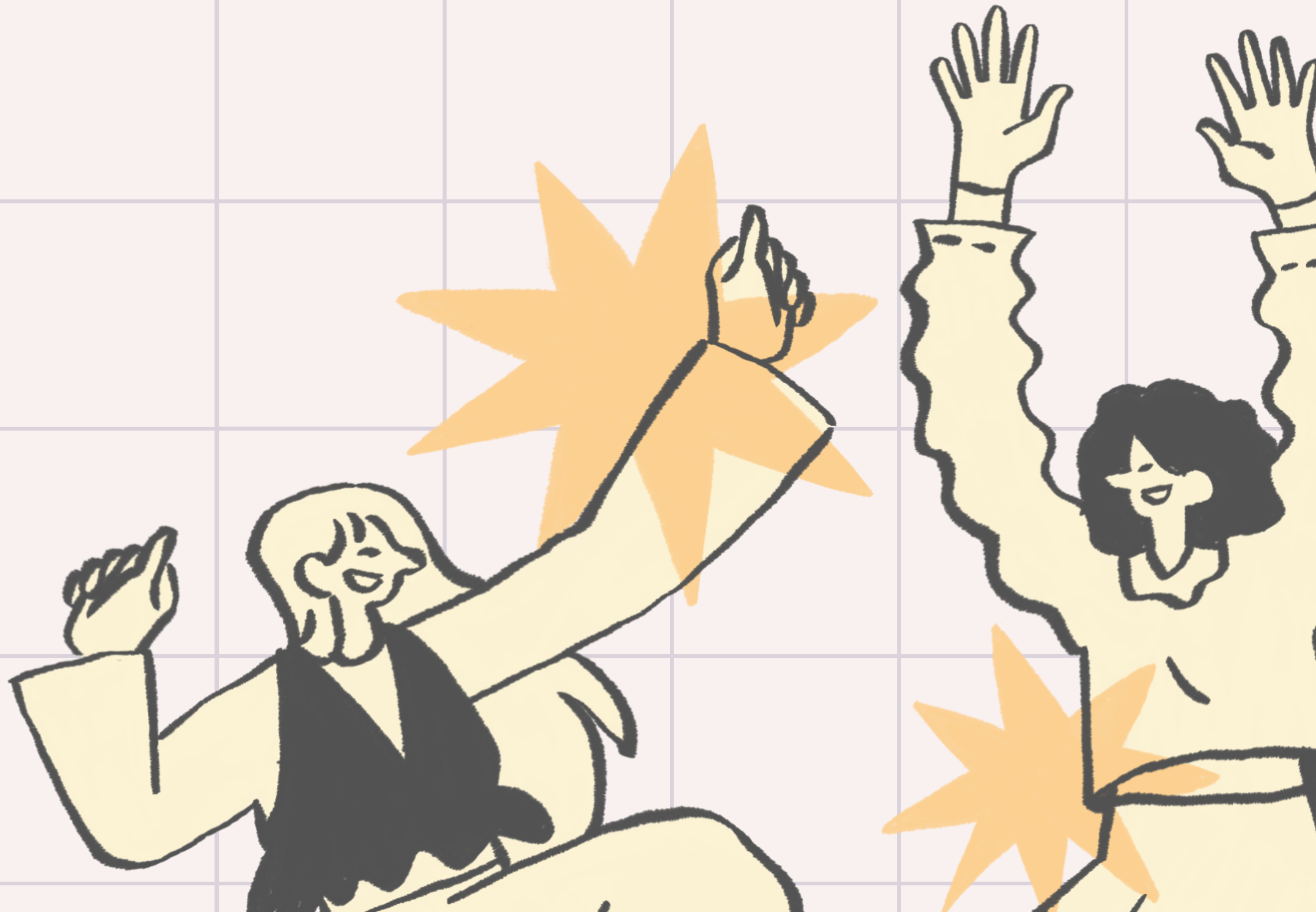
Jika penjumlahan dan perkalian berikut terdefinisi, maka:

$(AB)C = A(BC)$	Asosiatif
$A(B + C) = AB + AC$	Distributif Kanan
$(B + C)A = BA + CA$	Distributif Kiri
$k(AB) = (kA)B = A(kB)$	k skalar
$AB \neq BA$	Tidak komutatif



Determinan Matriks

Determinan adalah suatu konstanta yang dimiliki oleh matriks persegi, dan digunakan untuk mencari invers atau kebalikan matriks tersebut. Determinan matriks juga dapat digunakan untuk mencari solusi sistem persamaan linear. Determinan matriks A, dituliskan sebagai det A atau |A|.



Determinan Matriks Ordo 2X2

Misal A adalah sebuah matriks berordo 2 x 2, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

det A atau |A| adalah:

$$|A| = ad - bc$$

Determinan Matriks Ordo 3 x 3

Ada dua metode yang umum digunakan dalam mencari determinan matriks ordo 3x3. Kali ini kita akan mempelajari metode yang dinamakan aturan Sarrus, diambil dari nama penemunya, seorang matematikawan Perancis yaitu Pierre Frédéric Sarrus.

Langkah-Langkah Aturan Sarrus

#1 Salinlah elemen-elemen pada kolom pertama dan kolom kedua, dan simpan di sebelah kanan matriks.

$$|A| = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

#2 Tandai enam diagonal yang terbentuk, yaitu 3 diagonal utama dan tiga diagonal samping.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

Diagonal Utama

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

Diagonal Samping

#3 Kalikan elemen masing-masing diagonal, dan jumlahkan hasil perkaliannya.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$aei + bfg + cdh \qquad ceg + afh + bdi$$

#4 Kurangkan hasil penjumlahan sebelumnya yaitu diagonal utama dikurangi oleh diagonal samping.

$$\boxed{|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)}$$

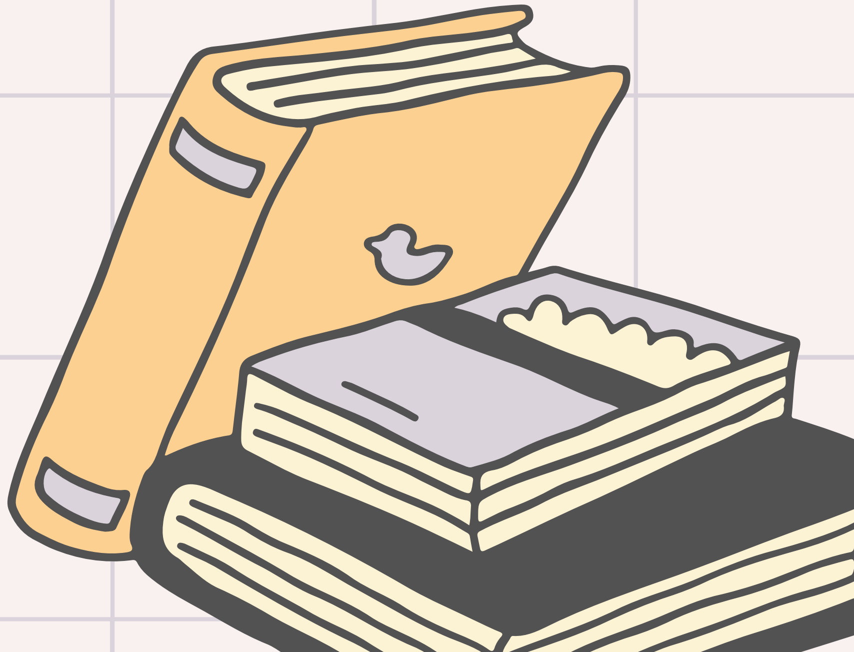
Invers Matriks

Invers matriks dimiliki oleh matriks persegi, sehingga berlaku:

$$A \times A^{-1} = I$$

Invers matriks didefinisikan oleh rumus disamping, dengan |A| adalah determinan matriks A dan adj A adalah adjoin dari matriks A.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times adj\,(A)$$



Invers Matriks Ordo 2X2

Misal A adalah sebuah matriks berordo 2 x 2, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

adjoin matriks A adalah:

$$adj\left(A\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Invers Matriks Ordo 3x3

Untuk mencari invers matriks ordo 3x3, kita perlu mencari adjoin matriksnya dulu. Misal A adalah matriks ordo 3x3, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Adjoin matriks A akan memiliki elemen-elemen dengan tanda negatif dan positif yang selang-seling, misalnya yaitu:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} +x_{11} & -x_{12} & +x_{13} \\ -x_{21} & +x_{22} & -x_{23} \\ +x_{31} & -x_{32} & +x_{33} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari elemen - elemen dari adjoin A maka kita harus “menutup” baris dan kolom yang bersesuaian dengan masing-masing elemen, lalu mencari determinan dari matriks 2x2 yang terbentuk.

Untuk mencari x_{11}, tutup baris pertama dan kolom pertama.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad x_{11} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = ei - fh$$

Untuk mencari x_{12}, tutup baris pertama dan kolom kedua.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad x_{12} = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} = di - fg$$

Untuk mencari x_{13}, tutup baris pertama dan kolom ketiga.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad x_{13} = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = dh - eg$$

Untuk mencari x_{21}, tutup baris kedua dan kolom pertama.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad x_{21} = \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} = bi - ch$$

Untuk mencari x_{22}, tutup baris kedua dan kolom kedua.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$x_{22} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} = ai - cg$$

Untuk mencari x_{23}, tutup baris kedua dan kolom ketiga.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$x_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} = ah - bg$$

Untuk mencari x_{31}, tutup baris ketiga dan kolom pertama.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad x_{31} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = bf - ce$$

Untuk mencari x_{32}, tutup baris ketiga dan kolom kedua.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad x_{32} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

Untuk mencari x_{33}, tutup baris ketiga dan kolom ketiga.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$x_{33} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

$$adj\,(A) = \begin{bmatrix} +x_{11} & -x_{12} & +x_{13} \\ -x_{21} & +x_{22} & -x_{23} \\ +x_{31} & -x_{32} & +x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(ei - fh) & -(di - fg) & +(dh - eg) \\ -(bi - ch) & +(ai - cg) & -(ah - bg) \\ +(bf - ce) & -(af - cd) & +(ae - bd) \end{bmatrix}$$

Setelah elemen dari adjoin matriks A diketahui, maka substitusikanlah ke dalam formula invers matriks yang sebelumnya ditampilkan.

$$A^{-1} = \frac{1}{(aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)} \times \begin{bmatrix} +(ei - fh) & -(di - fg) & +(dh - eg) \\ -(bi - ch) & +(ai - cg) & -(ah - bg) \\ +(bf - ce) & -(af - cd) & +(ae - bd) \end{bmatrix}$$

Tentu saja formula di atas sangat panjang dan **tidak untuk dihafal**. Sebaiknya pahamilah langkah-langkah dalam mencari determinan dan adjoin matriksnya saja.

Terimakasih!

Sampai bertemu di kelas selanjutnya!

Elemen